1 Der Hubble-Parameter

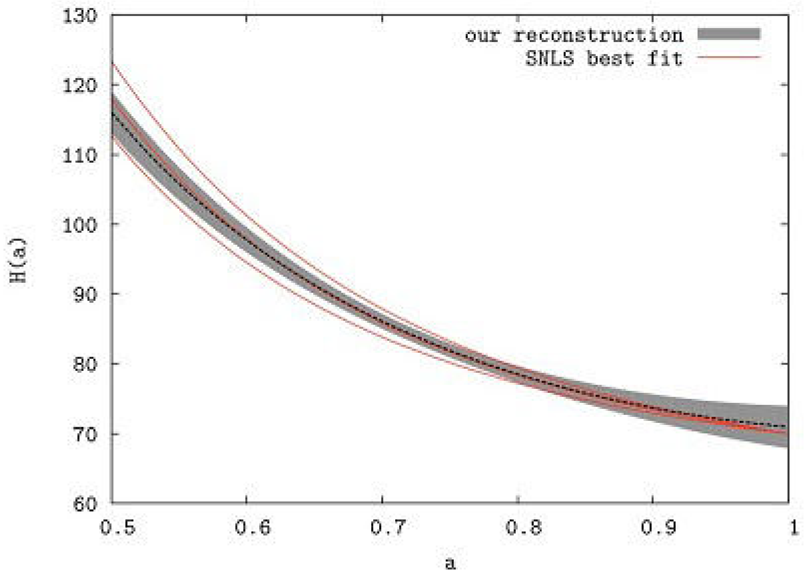
Der Hubble-Parameter charakterisiert die Expansionsgeschichte des Universums.

Seine Einheit ist $\left[\frac{m}{s\,m}\right]=s^{-1}$. In der Literatur wird oft von $\left[\frac{km}{s\,Mpc}\right]$ gesprochen, wobei ein Megaparsec $Mpc=3.0856775\cdot10^{22}\,m$ ist.

Auf diese Weise wird der Gedanke George Lemaîtres, der die Expansion des Universums 1927 mit seiner Urknalltheorie vorhergesagt hat, in Zahlen ausgedrückt, was Edwin Hubble 1929 schließlich bestätigt und gemessen hat.

2 Der Hubble-Parameter der Empirie

Die Messung des SuperNova Legacy Surveys erbrachte den folgenden Verlauf des Hubble-Parameters:



An der Ordinate sieht man den Wert des Hubble-Parameters H(a), wie er in der Literatur üblich ist. Die Abszisse gibt den Wert des Skalenfaktors a zwischen dem halben Alter gegenüber heute (0.5) und heute (1) an.

3 Der Hubble-Parameter der ART

Der Hubble-Parameter Alexander Friedmanns Kosmos', der die ART Albert Einsteins weiterentwickelte, ist definiert durch $H(a)=\frac{\dot{a}}{a}$, worin a der Skalenfaktor ist. Dieser berechnet sich als $a(t)=\left(\sqrt{\frac{\Omega_{m,0}}{1-\Omega_{m,0}}}\sinh\left(3H_0 t\frac{\sqrt{1-\Omega_{m,0}}}{2}\right)\right)^{\frac{2}{3}}$. Die Ableitung des Skalenfaktors nach der Zeit ist $\dot{a}=\frac{d}{dt}a$.

In der Wissenschaft ist der Ausdruck $H(a)=H_0\sqrt{\frac{\Omega_{m,0}}{a^3}+(1-\Omega_{m,0})}$ weit üblicher und wird später noch gebraucht.

Diese Termini sind Friedmanns Feldgleichungen zu entnehmen.

3.1 Die Dichteparameter

In der ART kann die Geometrie des Raums über große Skalen sphärisch, hyperbolisch oder flach sein. *Flach* bedeutet, der Raum des Universums ist nicht gekrümmt. Man spricht auch vom *euklidischen* Raum. Ein flacher Raum bedeutet in der ART, dass die Menge der Energie in ihm einen bestimmten kritischen Wert der äquivalenten Dichte ρ_c hat, schließlich besagt die ART, dass Materie mit Energie äquivalent ist: $E=mc^2$.

Da Einsteins Gleichungen die Größe des Universums nicht mit der vorhandenen Energie erklären konnten, führte er in seinen Berechnungen die kosmologische Konstante ein, die einer konstanten Energiedichte über die Expansionsgeschichte des Universums entspricht. Bei näherer Betrachtung ist dies ein perpetuum mobile, denn die Menge der Energie wächst mit der Expansion, ohne dass es dafür einen ersichtlichen Grund gibt. Die Energie der kosmologischen Konstante nennt sich heute *Dunkle Energie* und wird mit Λ bezeichnet.

Materie kann also in Energie und Energie in Materie ausgedrückt werden. So kommt es, dass auch die Dichte der Dunklen Energie in kg/m^3 ausgedrückt wird.

Die kritische Dichte für ein flaches Universum ist: $\rho_{c,0}=\frac{3H_0^2}{8\pi G}$, wobei die 0 stets für den Wert in der Gegenwart steht. Die kritische Dichte ergibt sich aus der Summe aller im Universum auftretenden Energien, was heute im Wesentlichen der Materie aus baryonischer und *Dunkler Materie* sowie der Dunklen Energie entspricht: $\rho_c=\rho_m+\rho_\Lambda$. Die Dunkle Materie macht es möglich, dass Galaxien mit der Geschwindigkeit rotieren, wie es die Empirie mit Messungen erbracht hat. Genau wie die Dunkle Energie ist sie empirisch noch nicht erwiesen.

Der Dichteparameter $\Omega_{tot}=\Omega_m+\Omega_\Lambda=1$ bezeichnet das flache Universum. Wäre er niedriger, hätten wir ein hyperbolisches Universum, wäre er höher, ein sphärisches. So ergibt es sich, dass der Dichteparameter der Materie $\Omega_m=\frac{\rho_m}{\rho_c}$ und der Dichteparameter der Dunklen Energie

$\Omega_\Lambda=\frac{\rho_\Lambda}{\rho_c}$ ist.

Dieser Zusammenhang gilt nun über die gesamte Expansionsgeschichte des Alls, denn wenn das Universum zur Gegenwart flach ist, ist es dies nach der ART auch in aller Vergangenheit und Zukunft.

4 Der Hubble-Parameter nach Newton

In der Physik Isaac Newtons gibt es keinen Skalenfaktor a, doch wie sich noch zeigen wird, ist der Unterschied der Hubble-Parameter H(t) und H(a) aus Friedmanns Gleichungen leicht zu transformieren. Da der Hubble-Parameter nach Newton sich von H(a) unterscheidet, wird er mit dem griechischen H bezeichnet.

4.1 Die Dichte

Während wie o.g. die Dichte der Dunklen Energie mit der Expansion des Universums weder ab- noch zunimmt, verhält sich die Dichte der Materie nach Newton über die Expansionsgeschichte in einem kubischen Zusammenhang, schließlich ist ihr Entstehen kurz nach dem Urknall abgeschlossen.

Die Masse der Materie bleibt also konstant, so dass sich ihre Dichte über den Vergleich gleich schwerer $(m_{m,0}=m_m(t))$ aber unterschiedlich großer Vollkugeln mit $R_0=c\,t_0$ und $R(t)=c\,t$ über $\frac{4}{3}\pi\,\rho_{m,0}(c\,t_0)^3=\frac{4}{3}\pi\,\rho_m(t)(c\,t)^3$ zu $\rho_m(t)=\rho_{m,0}\frac{t_0^3}{t^3}$ entwickelt.

4.2 H(t)

O.g. Gleichung für die kritische Dichte lässt sich nach H_0 umstellen: $H_0=\sqrt{\frac{8}{3}\rho_{c,0}\pi\,G}$.

Mit $\rho_c(t)=\rho_m(t)+\rho_\Lambda$ wird daraus der Verlauf des Hubble-Parameters Newtons nach der Zeit: $\mathrm{H}(t)=\sqrt{\frac{8}{3}\left(\rho_{m,0}\frac{t_0^3}{t^3}+\rho_\Lambda\right)\pi\,G}$.

Dieser Ausdruck weist eine Ähnlichkeit zum bereits o.g. Hubble-Parameter nach Friedmann $H(a)=H_0\sqrt{\frac{\Omega_{m,0}}{a^3}+(1-\Omega_{m,0})}$ auf.

Um sich dieser nun anzunähern, werden in H(t) die Dichteparameter eingeführt, in dem nach o.g. Definition mit $\rho_\Lambda=\Omega_\Lambda\,\rho_{c,0}$ und $\rho_{m,0}=\Omega_{m,0}\,\rho_{c,0}$ $\mathrm{H}(t)=\sqrt{\frac{8}{3}\left(\Omega_{m,0}\,\rho_{c,0}\frac{t_0^3}{t^3}+\Omega_\Lambda\,\rho_{c,0}\right)\pi\,G}$ ist.

Hieraus ist $\rho_{c,0}=\frac{3\,H_0^2}{8\pi\,G}$ zu elimieren: $\sqrt{\frac{8\pi\,G}{3\,H_0^2}}\mathrm{H}(t)=\sqrt{\frac{8}{3}\frac{\Omega_{m,0}\,\rho_{c,0}\frac{t_0^3}{t^3}+\Omega_\Lambda\,\rho_{c,0}}{\rho_{c,0}}\pi\,G}$,

womit $\mathrm{H}(t)=H_0\sqrt{\Omega_{m,0}\frac{t_0^3}{t^3}+\Omega_\Lambda}$ ist.

4.3 H(a)

Die Ähnlichkeit H(t)‘s zum H(a) Friedmanns verlockt dazu, das newton’sche H(t) zum friedmann’schen H(a) zu transformieren:

Es soll H(t) = H(a) gelten: $H_0\sqrt{\Omega_{m,0}\frac{t_0^{\;3}}{t^3}+\Omega_\Lambda}=H_0\sqrt{\frac{\Omega_{m,0}}{a^3}+(1-\Omega_{m,0})}$.

Mit $\Omega_{tot}=1$ und damit $1-\Omega_{m,0}=\Omega_\Lambda$, sieht die Gleichung noch ähnlicher aus:

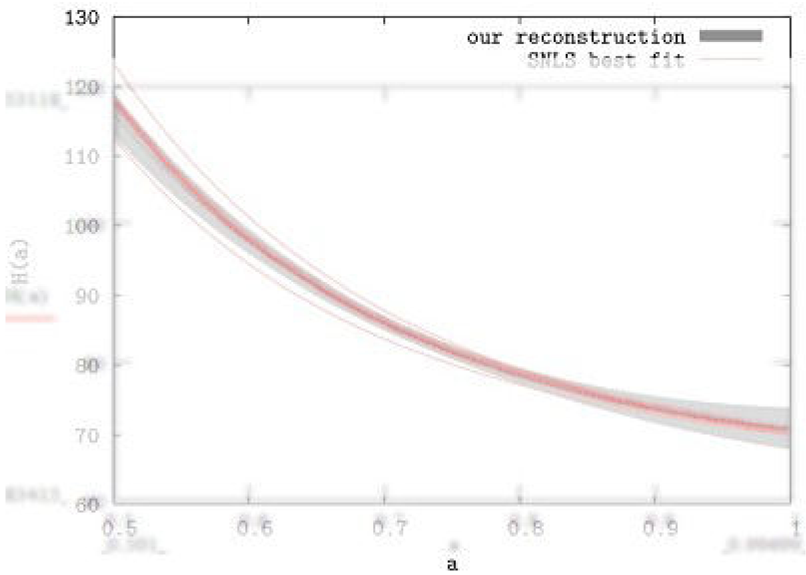
$$H_0\sqrt{\Omega_{m,0}\frac{t_0^{\;3}}{t^3}+(1-\Omega_{m,0})}=H_0\sqrt{\frac{\Omega_{m,0}}{a^3}+(1-\Omega_{m,0})} \quad .$$

Die Umstellung nach t fördert $t=t_0\,a$ zutage, so dass H(t) zu $H(a)=H_0\sqrt{\frac{\Omega_{m,0}}{a^3}+(1-\Omega_{m,0})}$ wird, womit das Ziel erreicht ist.

Um einen Ausdruck nach den Dichten zu haben, lassen sich die Dichteparameter vorbildlich Kap. 4.2 leicht ersetzen: $H(a)=\sqrt{\frac{8}{3}\left(\frac{\rho_{m,0}}{a^3}+\rho_\Lambda\right)\pi G}$.

5 Resümee

Anhand der unten stehenden Abbildung der Gestalt des bereits o.g. empirischen Wertes des SuperNova Legacy Survey transparent überlagert vom theoretisch ermittelten und bereits o.g. Hubble-Parameter nach den Dichten



wird mittels des Vergleichs zwischen Empirie und Theorie nicht nur bewiesen, dass die ART für die Theorie des Kosmos geeignet ist sondern auch die flache Geometrie des Universums.

Theorien sphärischer oder hyperbolischer Geometrie sind damit ausgeschlossen.

Adam Riess bestätigte 1998 empirisch die Vorhersage der Theorie, das Universum müsse sich ab einem bestimmten Zeitpunkt mit positiver Expansionsbeschleunigung ausdehnen. Albert Einstein musste in seiner ART zu diesem Zweck die kosmologische Konstante Λ einführen, die heute als Dunkle Energie bekannt ist, und ohne die der Kosmos kollabiert. Zur Bestimmung dieser Zeit gibt es zwei einander äquivalente Verfahren:

1 $\ddot{a}>0$

Elegant erscheint die Methode, den Wendepunkt der Funktion $R(a)=R_0 \cdot a(t)$ mit $R_0=c t_0$ als Beginn der beschleunigt expansiven Phase zu bestimmen. Wendepunkte werden mittels $f''(x)=0$ gefunden. Die Ableitungen des Skalenfaktors a(t) sind jedoch für eine Auflösung nach t zu kompliziert, so dass Näherungsverfahren zur Hilfe genommen müssen. Am Beispiel des newton’schen Näherungsverfahren zeigt sich die Lösung von f’‘(x) = 0 anhand von $x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$ mit n = 1, 2 .. n. In diesem Fall also $t_n=t_{n-1}-\frac{\ddot{a}(t_{n-1})}{\dddot{a}(t_{n-1})}$. Die Konvergenz wird mittels der Vorschrift $\left|\frac{\ddot{a}(t_a)\frac{d^4}{dt_a{}^4}a(t_a)}{\dddot{a}(t_a)^2}\right|<1$ für einen geeigneten Anfangswert t_a geprüft.

Mit $t_a=0.3\,t_0$ ist die Vorschrift gerade noch erfüllt.

Mit n = 6 wird eine ausreichende Genauigkeit der Iteration erreicht. Mit $a_0=1$ wird a(t) nach t aufgelöst, um t_0 zu bestimmen, so dass über $t_G=t_0-t_n$ der Anfang der Phase der positiven Expansion vor $t_G \approx 6.1\, Mrd.Jahren$ Jahren errechnet wird, angenommen, $\Omega_{m,0}=0.3153$, wie es der Literatur als aktueller Wert der Empirie zu entnehmen ist.

2 g > 0

Die Mechanik legt nahe die Phase der positiven Expansion mit der Gesamtbeschleunigung der Expansion des Kosmos g(a) = 0 zu finden. Es ist bekannt, dass diese zu Beginn negativ ist, um anschließend die positive Beschleunigung der Dunklen Energie dominieren zu lassen. Während also die Beschleunigung der Materie $g_m(a)=-\frac{m_0 G}{R(a)^2}$ ist, ergibt sich die Beschleunigung der Dunklen Energie entgegen einer mech. Auffassung $g_{\Lambda,M}(a)=\frac{m(a)G}{R(a)^2}$ wegen der Erfüllung der Poisson-Gleichung zu $g_\Lambda(a)=\frac{\Lambda c^2}{3}R(a)$, schließlich muss das Gravitationspotential quadratisch mit R ansteigen und die Kraft daher linear.. Die Gesamtbeschleunigung ist also $g(a)=g_\Lambda(a)+g_m(a)$. Diese wird g(a) = 0 gesetzt und nach a zu $a=\left(4\pi\frac{G\rho_{m,0}}{\Lambda c^2}\right)^{\frac{1}{3}}$. Mit $\Lambda=3H_0{}^2\frac{\Omega_\Lambda}{c^2}$ sowie $\rho_{m,0}=\Omega_{m,0}\,\rho_{c,0}$ und $\rho_{c,0}=\frac{3H_0{}^2}{8\pi G}$ ergibt sich für $a=\left(\frac{\Omega_{m,0}}{2\Omega_\Lambda}\right)^{\frac{1}{3}}$. Mit diesem Skalenfaktor a kann per Auflösung von a(t) nach t der Zeitpunkt t_n gegenüber dem Urknall ermittelt werden. $t_G=t_0-t_n$ ergibt dann für t_G das exakt gleiche Ergebnis wie in Kap.1.